

# 衝撃破壊面の変形フーリエ級数表示

中 峠 哲 朗<sup>\*</sup>・若 林 繁<sup>\*\*</sup>・沢 田 紀 久 男<sup>\*\*</sup>

## Modified Fourier Series Spectrum of Impact Fracture Surface

Tetsuro NAKATAO, Shigeru WAKABAYASHI and Kikuo SAWADA

(Received Oct. 15, 1972)

Roughness of the fracture surface of commercial steel is different according to materials and force. We reported previously a method for the numerical estimation of roughness in which the mean fracture surface is approximated by a power series of the coordinate. In this paper the mean surface is approximated by Fourier series modified so as to fit physically to the practical mean surface. Various types  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  and  $U_c$  of modification are estimated and it is concluded that the type  $U_c$  is the most adequate on the points of reliability for the various degree of approximation and practical numericals of the coefficients. It is obtained that low frequency terms much depend on the material but high frequency terms do not.

### 1 はじめに

破断面の様相は概観的に見た場合に、材料の種類、性質、内部構造、粒子構造、さらに応力の加え方などによって異なり、定性的にある程度、その系統性が知られている。筆者らは巨視的な立場から破壊現象を研究する一方法として、破断面の様子を定量的に論ずるための方法を検討し、これまでに衝撃破壊による破壊面の大略を平均曲面とそのばらつきを用いて記述した。さらに平均曲面を多少詳しく論ずるためにべき多項式で近似して、べき級数スペクトル表示を用い得ることを示した。今回は平均曲面をフーリエ級数で近似する方法を検討し、物理的な観点から変形フーリエ級数を用いてみたので報告する。

### 2 破断面の定量処理法の概要

前報では、衝撃破壊面を定量的に処理する基本的な方法を報告した。それによって得られた結果の概要は次のとおりである。

#### 2・1 試料および実破断面

いま、4種類の材料すなわち  $F_1$ :ねずみ鋳鉄(FC15)

$F_2$ :機械構造用炭素鋼(S45C),  $F_3$ : $F_2$ の焼入,  $F_4$ : $F_2$ の焼戻しなどについて衝撃破壊を行なったのち Fig. 1 (a) のように中心部の破壊面をとり出した。破壊面の写真の一例を同図(b)に示すが、写真より直接わかる主要な特徴は次のとおりである。

i) 破断面を全体として見たとき、大略的な曲りは  $F_1$  の場合が最も大きい。  $F_1 \sim F_3$  の面について大差はないが多少  $F_1$  の面の方が大きい。

ii) 破断面を多少小さい尺度(例えば全長の1/10の大きさ)でみたとき、凹凸は  $F_1$  の面がもっとも大きく  $F_3$  の面がもっとも小さい。これは  $F_1$  が鋳鉄であるために組織粒子が粗く、 $F_3$  は焼入したために極めて細いこととよく対応している。

#### 2・2 破断面の粗さの定量表示

破断面の様相を、材料の諸性質や組織構造、あるいは応力の種類などと関連させて研究するために、有効な諸要素を求める第一段階として、前報では破断面の凹凸状態を次の方法によって定量表示すれば、破断面の様相の系統性を論じ得ることを述べた。

\* 応用物理学科 \*\* 富山県立技術短大

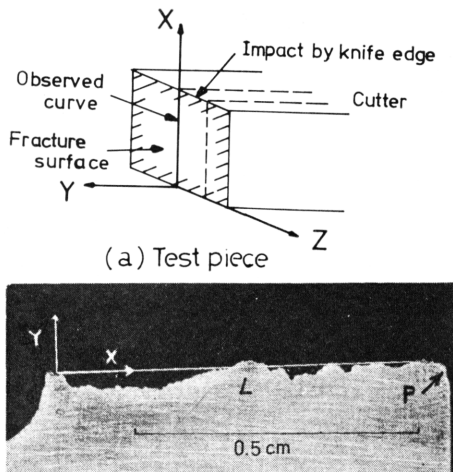
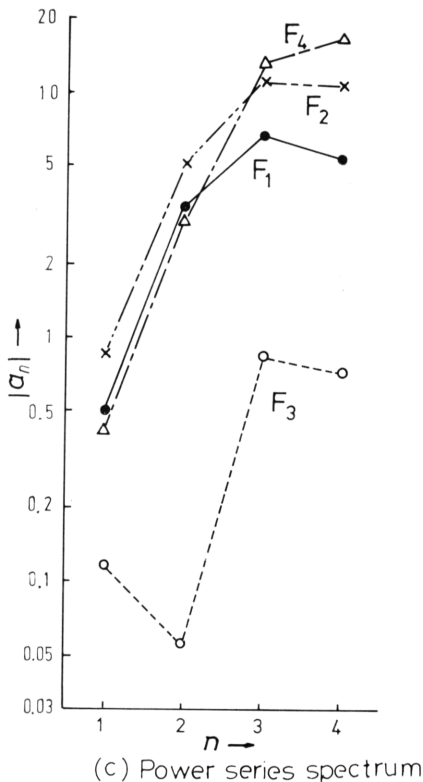
(b) The impact fracture surface of F<sub>2</sub>

Fig. 1 Roughness in impact fracture surface

### 2・2・1 平均曲線とべき級数表示

まず, Fig. 1 (b) において破断面の破壊開始点と衝撃点を結ぶ直線をX軸とし, 破壊開始点を原点にとって直交座標系X, Yをつくる。そして破断面をS(X,

Y)とする。面Sの大略的な曲り(平均曲線)を記述するために, 破断面を座標XについてK等分し, 面上の各点 $Q_i(X_i, Y_i)$ を読む。X, Y両座標を破断面のX軸上の全長Lに対する比をとり無次元表示し,  $Q_i(x_i, y_i)$ とする。それをべき多項式

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad \dots\dots\dots(1)$$

で近似する。このとき得られる $|a_n|$ は平均曲線の各種の曲りの強さを表わすと考えられるので,  $|a_n|$ のnによる変化を描き, これをべき級数スペクトルと呼ぶ。その1例は Fig. 1 (c) のとうりである。各試料についてのべき級数スペクトルを比較すると, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>では類似スペクトルをもち, F<sub>4</sub>では低次項が小さく高次項が大きい。F<sub>3</sub>ではスペクトルの概形も他のスペクトルとかなり異っているだけでなく, 全体としてもそのレベルは小さい。この結果を2・1に述べた写真観察と比較すると, スペクトルの概形と大きさ(強さ)とを材質に関する特徴として用い得ることがわかった。

### 2・2・2 粗さ分布

つぎに破壊面における平均曲面のまわりの凹凸状態を考え, 順位分布法にしたがって次のように表示した。

破断面上の各点  $Q_i(x_i, y_i)$  に対応する平均曲線(1)式上の点  $Q_i^*(x_i, f(x_i))$  を求め, 両者のy軸方向の差  $q_i = y_i - f(x_i)$  ( $i=0, \dots, K$ )

の大きいものから順に並べる。ここで新しく番号をつけ直して  $q_i^*(i=0, \dots, K)$  として表わす。  $s_j = q_i^* - q_{i-k}^*$  を

$$s_j = s_0 \exp(-j/H) \quad \dots\dots\dots(2)$$

で近似し,  $s_0$ ,  $H$ ,  $\alpha = [K/2]H$  をそれぞれ粗さの代表値とした。 $s_0$  は粗さを表わす代表値であり,  $H$  は粗さの粗いものから細いものまでの分布状態を表わし,  $\alpha$  は測定点数によらないHの変形表現である。計算の結果は  $s_0$  と  $\alpha$  が各試料によってかなり特徴が見られ, 2・1の写真観察の結果と対応することがわかった。

### 3 変形フーリエ級数近似

今回は前報の用いた平均曲線(1)式のかわりに, 普通よく用いられるフーリエ級数で近似する方法を検討する。

#### 3・1 べき級数表示とフーリエ級数表示

前報で平均曲線を近似するためにべき級数を用いたのは次の点を考慮したためである。すなわち破壊面の様相が主として材料構造および応力によって規定される事実を定性的に検討した結果, 一般に破壊面の様子

は材料の欠陥構造と破壊応力の分布とに依存するが、衝撃破壊面では主として欠陥構造の依存が主要な要素となる。それで衝撃破壊面では破壊開始点と破壊終了点とでかなり対称的な結果が得られるであろう。しかし疲労破壊面では応力の大小が大きく影響するため非対称の形となる。実さいに疲労破壊では破壊面が狭義の疲労破壊面（初期のなめらかな部分）から衝撃破壊面へ移行することはよく知られている。したがって前報では破壊面を近似する形式的な方法としてべき級数、フーリエ級数、その他の各形式中いづれを用いることが妥当であるかという問題についてあまり立入らず、破壊面の非対称的な処理方法としてべき級数表示を試みた。しかし平均曲面の近似法としてべき級数を用いることが適当であるという根拠がないのみならず、一般に各種の変動量を表示するときは、フーリエ級数がよく用いられることから、今回はこのフーリエ級数を改良し、非対称性を表現することを試みる。

### 3・2 平均曲線のフーリエ級数近似

フーリエ級数による近似の一般式は

$$f_N(x) \equiv \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n \cos \omega_n x + B_n \sin \omega_n x) \\ = R_0 + \sum_{n=1}^N R_n \sin(\omega_n x + \varphi_n) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{但し } \omega_n = 2\pi n \quad \dots\dots\dots(4)$$

の形で表わされる。

いま、破壊面をフーリエ級数に展開するとき3・1の議論を参照して、特に破壊面の3種類の区間、 $0 \sim 2\pi$ ,  $0 \sim \pi$ ,  $0 \sim \frac{\pi}{2}$ に対応する場合を考える。

まず(4)式のかわりに  $\omega_n p = 2\pi n p$  を用いる3種の区間を用いた。近似法の  $p$  の値および計算に使用するデータを次のようにとる

$S_a$  近似法:  $p=1$ ,  $Q_i (i=0, \dots, K)$  はすべて観測点とする。

$S_b$  近似法:  $p = \frac{1}{2}$ ,

$Q_f (i=0, \dots, K)$ : 観測点

$Q_i (i=K, \dots, 2K)$ :  $x_i = \pi + x_{i-K}$ ,  $y_i = -y_{2K-i}$

$S_c$  近似法:  $p = \frac{1}{4}$

$Q_i (i=0, \dots, i, K)$ : 観測点

$Q_i (i=K, \dots, 2K)$ :  $x_i = \frac{\pi}{2} + x_{i-K}$ ,  $y_i = y_{2K-i}$

$Q_i (i=2K, \dots, 3K)$ :  $x_i = \pi + x_{i-K}$ ,  $y_i = y_{2K-i}$

$Q_i (i=3K, \dots, 4K)$ :  $x_i = \frac{3}{2}\pi + x_{i-3K}$ ,  $y_i = -y_{4K-i}$

$S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  の各方法においても計算に用いた破断面の曲線形と実被断面との関係は Fig. 2 に示した。いま、計算結果の一例として、試料 F<sub>1</sub> (FC15) の破断面をとり  $N=5$  として3種の近似法で計算した場合の  $R_n$  の値を Table 1 に示す。

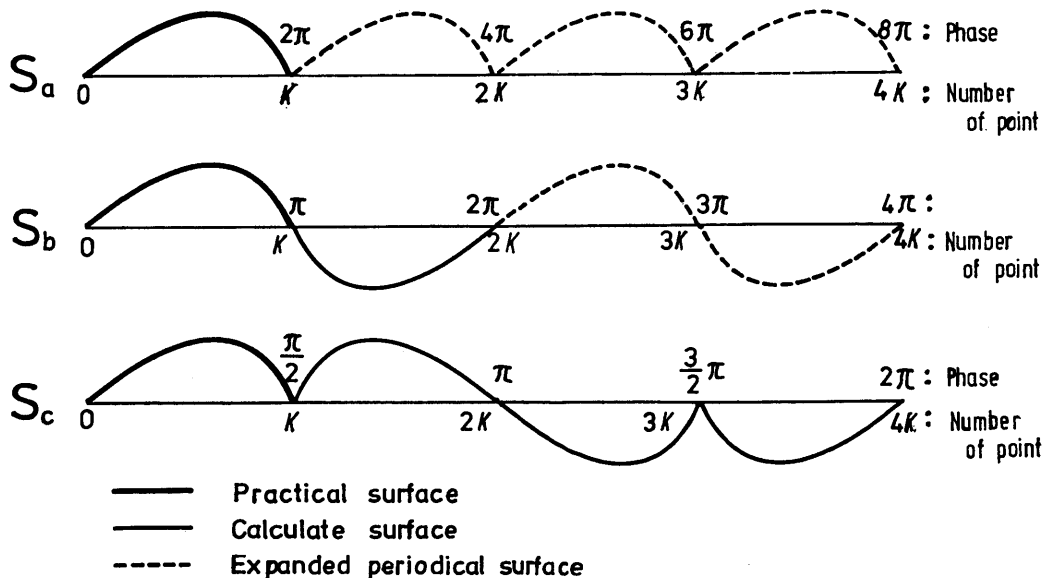


Fig. 2 Fracture surface in three approximations:  $S_a$ ,  $S_b$  and  $S_c$

Table 1 Numericals of Fourier coefficients in three approximations:  $S_a$ ,  $S_b$  and  $S_c$

$R_n$	Approximations		
	$S_a$	$S_b$	$S_c$
$R_0 = \frac{A_0}{2}$	0.016	0	0
$R_1$	0.026	0.030	0.023
$R_2$	0.0042	0.0045	0
$R_3$	0.0098	0.016	0.017
$R_4$	0.0042	0.0031	0
$R_5$	0.0040	0.0067	0.018

普通の周期関数をフーリエ級数表示する場合これら3種の計算の差異を議論することは意味がない。しかし破断面の関数は本質的には非周期関数であり、しかも有限の次数で形式的にフーリエ級数表示を試みたものであるから、上記の3種の計算法の物理的意義を検討することは特に計算結果を破壊現象の研究に役立てるために重要である。このため3・3で簡単な場合について係数の意義を検討し、3・4でフーリエ級数の改良について述べる。

### 3・3 フーリエ級数の係数の意義

まず、 $S_a$ および $S_b$ 近似法における $R_0$ ,  $R_1$ が示す平均曲線を比較するとFig. 3 (a), (b) のとおりである。なお、(a)では(b)と比較のために中央にピークがくるように位相を定めた。いま $S_b$ 近似法において $R_1$ は全試料面の単純な曲りを示しているから、 $S_a$ 近似をそれに対応させるとすれば $R_1$ だけ基準線をずらしたものと、振幅 $2R_1$ をもつ曲りととの和として考える必要がある。このとき $S_a$ ,  $S_b$ 近似法における係数の値を添字(a), (b)で区別すると大略的に次の関係が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} R_{0(a)} \doteq R_{1(a)} \\ R_{1(a)} \doteq 2R_{1(b)} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

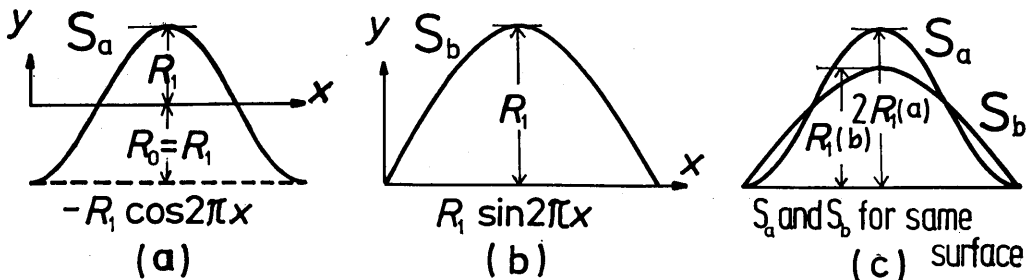


Fig. 3 Approximation curves in  $S_a$  and  $S_b$  of fracture surface

ただし $S_a$ の近似と $S_b$ の近似とは、近似曲線形がかなり異っているために、Fig. 3 (c) からわかるように同一測定群に対して $R_{1(a)}$ に対応する $R_{1(b)}$ はかなり小さい値をもつこと、および $R_{0(a)}$ には、その他第3項以下の各項の影響も加わっていることから(4)式は数値的にはかなりの誤差を許せば成り立つはずである。

実さい Table 1 より

$$R_{0(a)} = R_{1(a)} \times 0.60$$

$$R_{1(b)} = 2R_{1(a)} \times 0.58$$

が得られ、(4)式の解釈はほぼ妥当であることがわかる。したがって実さいの破断面との対応を考えるときは $S_b$ 近似法の $R_1$ には物理的意味を見い出すことができるが、 $S_a$ 近似法での $R_0$ ,  $R_1$ の値、特に $R_0$ の値が大きいことは物理的意味がない。

### 3・4 変形フーリエ級数の導入

前項の結果から、まず破壊面をフーリエ級数によって近似するときの問題点を記してみよう。

$a_1$ :  $S_a$ 近似法の $R_0$ は無意味であり、 $R_0$ と $R_1$ と併せたものが $S_b$ 近似法の $R_1$ に対応する。同様に考えると $S_b$ 近似法の $R_1$ は無意味であって、 $R_1$ と $R_2$ と併せたものが $S_c$ 近似法の $R_1$ に対応する。しかも $R_1$ の値は $S_b$ 近似法から $S_c$ 近似法に移ったときもほとんど変わらないから、さらに同様の議論をすすめて $S_d$ ,  $S_e$ 近似法を考えたとすれば、究極的にどこまで近似法をすすめればよいかわからない。具体的には有限な項数で近似を実施するためには、なんらかの簡易処理法が必要である。

$a_2$ :  $S_a$ 近似法は一般的なフーリエ級数表示であるが、 $S_b$ ,  $S_c$ 近似法はsine展開を行なったので、基本的にすべての項は原点で零と仮定している。しかしこの形式での級数表示が妥当であるか否か、いいえれば、破壊現象が材料中の欠陥にもとづくものである場合に、面の粗さ分布形式がフーリエ級数表示中の特定の形式として現われるかどうかという点について

は多分に否定的である。むしろ位相を含む一般展開の形式が望ましい。

a<sub>3</sub>: 以上の問題は本質的には破壊面のフーリエ積分表示することによって解決されるが、今回の目的は簡単な計算、かつ少数のパラメータによって表示することであるから、積分表示の方法はとらない。

以上の諸点から考えて、一つの試みとして次の方法を用いることとし、これを変形フーリエ級数と呼ぶ。すなわち

b<sub>1</sub>: まず a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub> の観点よりフーリエ級数表示は一般的な形式である S<sub>a</sub> 近似法が基礎的なものであると考える。

b<sub>2</sub>: a<sub>1</sub> の問題に対応して物理的な意味を明らかにするため R<sub>0</sub>, R<sub>1</sub> の項のみは S<sub>b</sub> 近似法を用いることがよい。

b<sub>3</sub>: R<sub>0</sub> は本質的には零となる。すなわち a<sub>2</sub> の場合は sine 展開であるから、原点から破壊が始まったことによって零であり、b<sub>1</sub> の場合には平均破壊面のまわりの変動であるから零となる。しかし実さいには b<sub>1</sub> を b<sub>2</sub> との区分は明確でなく、計算の便宜から形式的に区分したものであるから b<sub>2</sub> から b<sub>1</sub> への移行過程を行なうため補正項として b<sub>1</sub> の一般フーリエ級数中に定数を加えておく。

b<sub>4</sub>: なお S<sub>b</sub> 近似法の R<sub>1</sub> と S<sub>a</sub> 近似法の R<sub>1</sub> とは周期が異なるので形式的に S<sub>b</sub> 近似法の R<sub>1</sub> をそのまま残す。

以上によって実さいに使用する近似表示は(3)式のかわりに次式を用いる。

T<sub>b</sub> 近似法: (S<sub>b</sub> 近似法の変形)

$$p = \frac{1}{2}, \quad \omega_{np} = 2\pi np$$

$$N = 1, \quad f_1(x) = B_1 \sin \omega_{1p} x = R_1 \sin \omega_{1p} x$$

$$N \geq 2 \quad f_N(x) = f_1(x) + \frac{A_0}{2}$$

$$+ \sum_{n=2}^N (A_n \cos \omega_{np} x + B_n \sin \omega_{np} x)$$

$$= f_1(x) + R_0 + \sum_{n=2}^N R_n \sin(\omega_{np} x + \varphi_{np}) \quad \dots\dots\dots(6)$$

T<sub>c</sub> 近似法: (S<sub>c</sub> 近似法の変形)

$$p = \frac{1}{4}, \quad \omega_{np} = 2\pi np$$

$$N = 1 \quad f_1(x) = B_1 \sin \omega_{1p} x = R_1 \sin \omega_{1p} x$$

$$N = 2 \quad f_2(x) = B_2 \sin \omega_{2p} x = f_1(x) + R_2 \sin \omega_{2p} x$$

$$N \geq 3 \quad f_N(x) = f_2(x) + \frac{A_0}{2}$$

$$+ \sum_{n=3}^N (A_n \cos \omega_{np} x + B_n \sin \omega_{np} x)$$

$$= f_2(x) + R_0 + \sum_{n=3}^N \sin(\omega_{np} x + \varphi_{np}) \quad \dots\dots\dots(7)$$

U<sub>c</sub> 近似法: (T<sub>c</sub> 近似法の変形)

$$p = \frac{1}{4}, \quad q = 4p, \quad \omega_{np} = 2\pi np$$

$$N = 1 \quad f_1(x) = B_1 \sin \omega_{1p} x = R_1 \sin \omega_{1p} x$$

$$N = 2 \quad f_2(x) = f_1(x) + B_2 \sin \omega_{2p} x \\ = f_1(x) + R_2 \sin \omega_{2p} x$$

$$N \geq 3 \quad f_N(x) = f_2(x) + \frac{A_0}{2}$$

$$+ \sum_{m=1}^{N-2} (A_m \cos \omega_{mq} x + B_m \sin \omega_{mq} x)$$

$$= f_2(x) + R_0 + \sum_{m=1}^{N-2} R_m \sin(\omega_{mq} x + \varphi_{mq}) \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここに U<sub>c</sub> 近似法は T<sub>c</sub> 近似法の方法と同じであるが、N ≥ 3 について同一項数のパラメータを用いて周波数範囲を広げるために変形したものである。参考として、各近似法に用いた周波数を Fig. 4 に示してある。

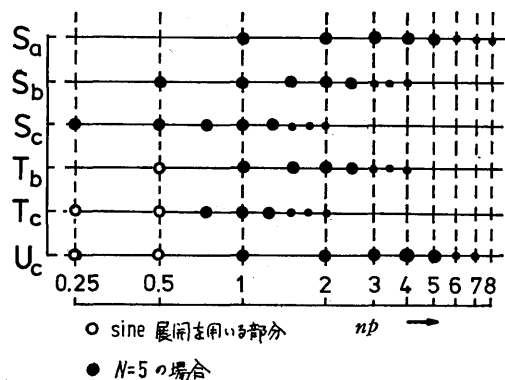
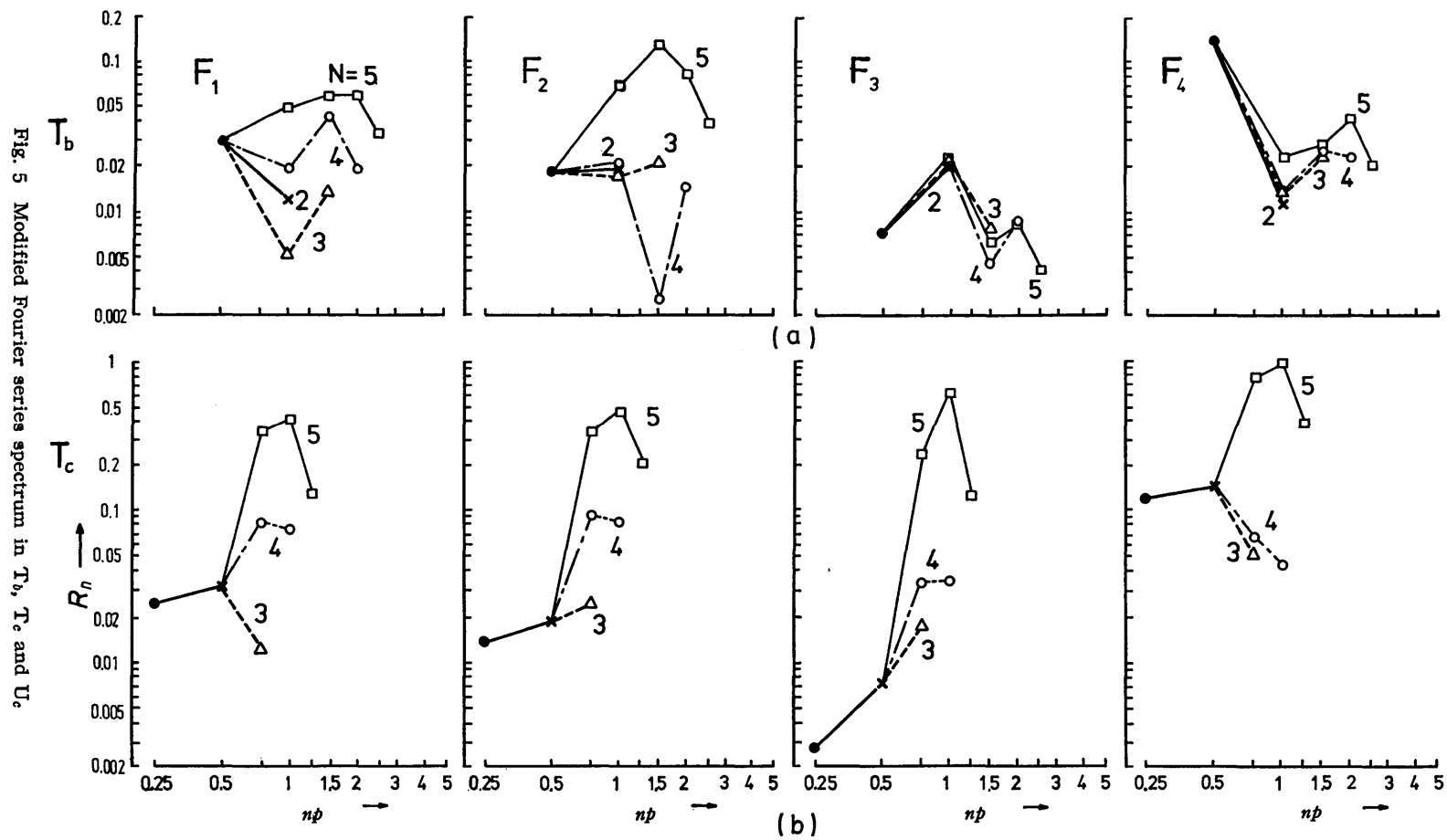


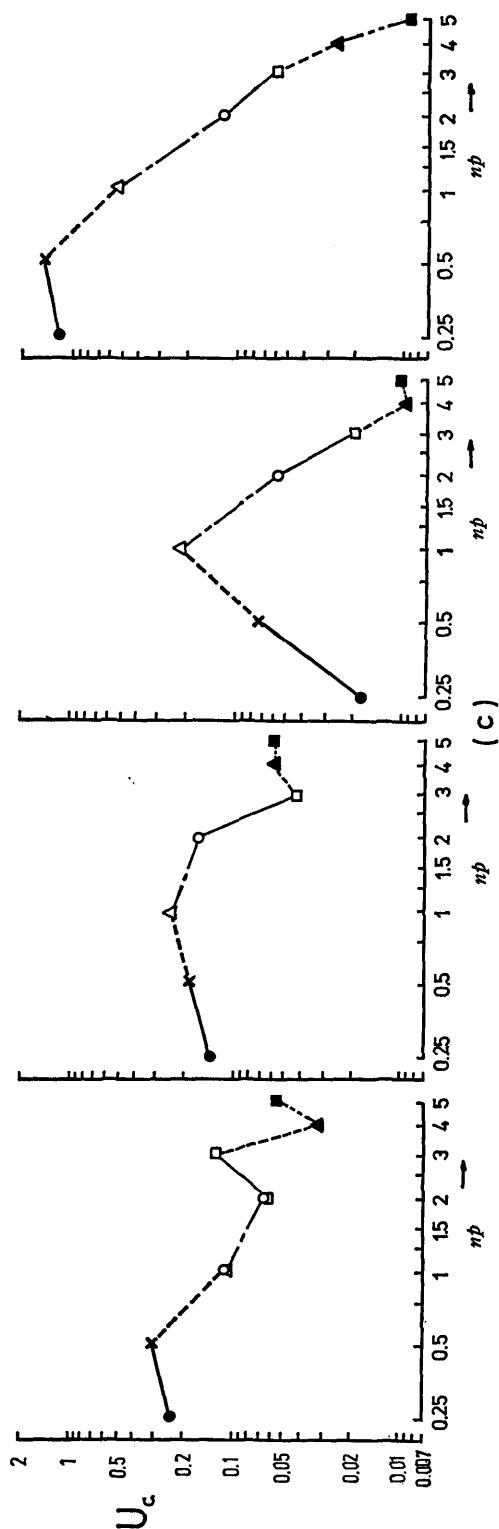
Fig. 4 Frequency ranges in various approximations

### 3.5 変形フーリエ級数表示の結果

前項では3種の変形フーリエ級数を考えた。これらの計算を行なった結果を調べるために、Fig. 5 (a), (b), (c)に示すように np に対する R<sub>n</sub> の変化を用いて検討する。なお U<sub>c</sub> 近似法では便宜上 N のかわりに N = N - 2 を用いてあり、今後その点について特に断わらず N と呼ぶ。

(i) 試料 F<sub>1</sub> の場合について N を 1 ~ 5 まで変化させたとき、近似次数 N の変化による各係数の安定性、すなわちスペクトルの曲線形の再現性について見れば、U<sub>c</sub> 近似法はもっとも安定な展開方法であるのに対し、T<sub>c</sub> 近似法では N の増加とともにそのスペクトル





ルのレベルが高くなり、不安定である。 $T_b$ 近似法ではその中間である。

(ii) 各試料において(i)の観点で見ると試料によって多少安定性に差があるが、概略的には上記の傾向が見られる。

(iii)  $F_1$ の $N=5$ の場合について各近似法によるスペクトルの形の差異を調べると、 $U_c$ 近似法ではほぼ単調に、しかも比較的早く減少するから級数はすみやかに収束する。したがって比較的狭い範囲の $np$ の値のみを用いて破断面の形を議論することができる。 $T_c$ 近似法では一つのピーク値を持ちその両側では急速に減少する。したがって、ピーク値付近の様子が、材料の特徴を示すと推定できる。 $T_b$ 近似法では各係数値はすべて同程度の大きさであるから、多数の項を用いて展開しないと破断面の形を議論しにくい。

(iv)  $F_2 \sim F_9$ の各試料についても、上記の(iii)の議論は妥当である。

(v) 各近似法について $N=5$ のときの各試料におけるスペクトルをFig. 6に示す。各近似法におけるスペクトルの曲線形の特徴を比較すると(b)図が最も系統性があり、(a)が最も系統性がない。図(b)についてながめると、すべての試料のスペクトルは類似しているとともに、その強さが試料の差を表わしている。特に低次側で試料の差が大きく現われていることは注目されまたピーク値は $np=0.75 \sim 1$ の位置にみられる。図(a)についてみると材料によって曲線の形がかなり異なるのみならず、この場合は特に3・3(i)に述べたように、 $N$ の値によるスペクトルの変化が大きいことから、スペクトルの差異が直接試料の差異に対応すると言い難い欠点がある。なお実さいの形状も各試料についての系統性があまりみられない。つぎに図(c)についてみると、高次の部分では試料による差異が比較的少なく、低次側では差が著しく大きい。この点はやや(b)図と類似した傾向である。また曲線形は $F_4$ 、( $F_1$ 、 $F_2$ )、 $F_9$ の順に系統的な変化が見られる。この点からすれば、 $np=1$ が高次項と低次項との境界になっている。

(vi) これまで述べたように、3種の近似式は、それぞれ特徴をもつが、このうちどの近似方式がよいかを検討しよう。

いま、 $T_b$ 近似法は(i)~(v)のすべてにおいて、他の近似法より欠点が多いことは明らかである。 $T_c$ 、 $U_c$ 両近似法については、スペクトルの系統性の点では $T_c$ 近似法がよく、スペクトルの曲線形の再現性、および近似の周波数範囲の広さという点では $U_c$ 近似

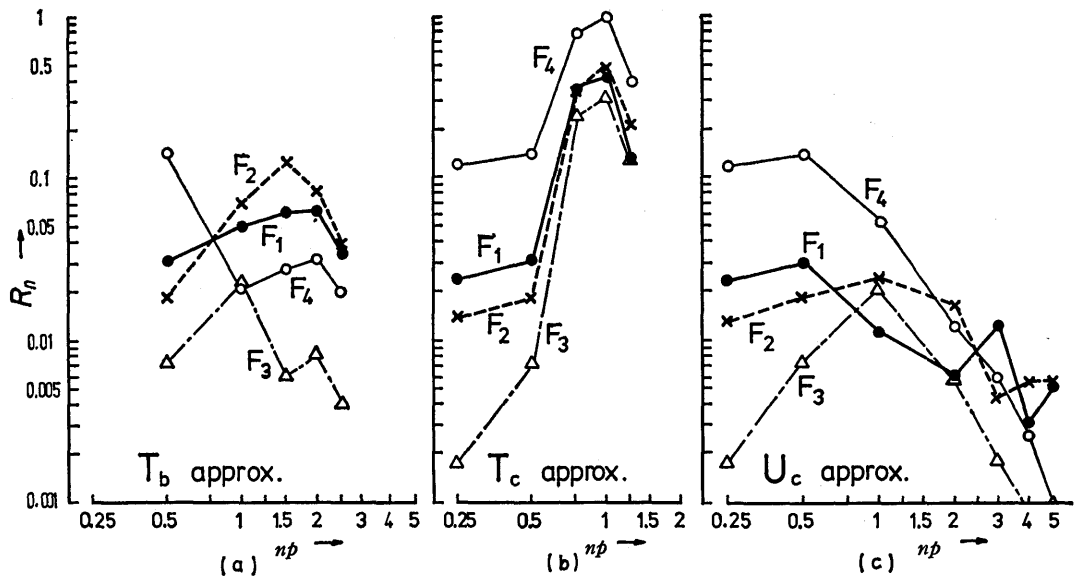


Fig. 6 Modified Fourier series spectrum for  $N=5$

法が有利である。ここで次のことに注意しよう。図(b)では  $R_n$  の最高値は1に近づいているが、これは破断面の長さと同程度の粗さが存在することを示す。しかし実さいそのような著しい粗さは写真中ではみられないから、このスペクトルを直接写真と比較してその物理的な意味づけができるか否かについて大いに疑問である。

(vii) べき級数表示と変形フーリエ級数表示の比較を行なえばよいが、実さいの破断面との対応について、なお検討すべき点があり、ここでは次のような概略的な推論にとどめる。すなわち、二つの表示法によるスペクトルの形状を比較すると、べき級数スペクトル表示法は変形フーリエスペクトル表示法での  $T_c$  近似法に類似している。したがってべき級数表示は  $T_b$  近似法によりはよく  $T_c$  近似法と同程度であること、および  $U_c$  近似法はべき級数表示法よりも一層妥当であることが推察される。

#### 4 む す び

前報では破壊面の大略的な曲り、すなわち平均破壊

面をべき級数で近似してきた。今回は、フーリエ級数表示を改良することによって材料の差異をある程度表示することができた。すなわち

(i) べき級数およびフーリエ級数の二つの展開法を主として物理的な観点から比較検討し、フーリエ級数を用いて表示するためにはこの形式を変形して用いる必要性を述べた。

(ii) 変形フーリエ級数として  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  の各方法を実施し、その結果からさらに物理的な意味を明確にする方法として  $T_b$ ,  $T_c$ ,  $U_c$  の3種の近似法を導いた。

(iii)  $T_b$ ,  $T_c$ ,  $U_c$  の3方法による近似結果を検討した。その結果、スペクトルの再現性試料による特徴との関係および周波数領域などの諸点において  $U_c$  近似法が最も適当であることを述べた。

#### 参 考 文 献

- 1) 中峠哲朗, 若林繁, 沢田紀久男 福井大工報 19, 161 (1971)
- 2) 若林繁, 中峠哲朗, 沢田紀久男 富山県立技術短大研究報告 5 (1972) 8
- 3) 中峠哲朗, 石原恒夫 福井大工報 20, 43 (1972)